

Correction du devoir surveillé n°9

Exercice I :

1. Soit $t \in]-1, 1[$. Si $t \leq 0$, alors $f(t) - f(0) = (0, 0)$. Sinon, $\frac{f(t) - f(0)}{t} = \left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right), t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ et puisque $\cos$ et $\sin$ sont bornées, $\left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right), t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = (0, 0)$. Ensuite, f est dérivable sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$. car, composante par composante, elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction f est constante sur $] -1, 0[$ donc $f' = 0$ sur $] -1, 0[$ et

/2

$$\forall t \in]0, 1[, f'(t) = \left(2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right), 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

2. Soit $t \in]0, 1[$. $\|f'(t)\|^2 = \left(2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 + \left(2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2$

/1

d'où $\|f'(t)\|^2 = (4t^2 + 1) \left(\sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\right) = 4t^2 + 1$.

3. Pour tout $t \in]-1, 0[$, $\|f'(t)\| = 0$ et pour tout $t \in]-1, 0[$, $\|f'(t)\| > 1$. Ainsi 0 et $\sqrt{2}$ appartiennent à $\{\|f'(t)\|, t \in]-1, 1[\}$ mais pas 1 donc $\{\|f'(t)\|, t \in]-1, 1[\}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

/2

Exercice II :

Méthode A :

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par théorèmes généraux. Calculer les dérivées partielles en un point générique (x, y) de $\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2(2 - x - y) - 2(1 - x) - 4(1 - 2x - y) = -10 + 12x + 6y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2(2 - x - y) - 2(1 - 2x - y) = -6 + 6x + 4y$. On sait que si la fonction f admet un extremum local sur $\mathbb{R}^2$ alors celui-ci est un point critique. Or (x, y) est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si et seulement si $-10 + 12x + 6y = 0$ et $-6 + 6x + 4y = 0$ si et seulement si $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$. Conclusion : si la fonction f admet un extremum local sur $\mathbb{R}^2$ alors celui-ci est atteint en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

/2

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $u = x - \frac{1}{3}$ et $v = y - 1$. Le calcul donne $f(u, v) = 6u^2 + 6uv + 2v^2 + \frac{4}{3}$.

/1

3. Or $6u^2 + 6uv + 2v^2 = 6\left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{2} \geq 0$. D'où $f(u, v) \geq \frac{4}{3}$. Or lorsque x et y décrivent $\mathbb{R}$ alors u et v également. Ainsi $\text{Im}(f) = \{f(u, v), u, v \in \mathbb{R}\}$ d'où f est minorée par $\frac{4}{3}$.

/2

4. Or $f\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{4}{3}$ d'où f admet un minimum global en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ et $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = f\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{4}{3}$.

/1

Méthode B :

On note $a = (2, 1, 1)$, $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 0, 1)$ et $F = \text{Vect}(u, v)$.

1. $\text{Im}(g) = \{g(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{xu + yv \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u, v) = F$.

/2

Par ailleurs, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\|a - g(x, y)\|^2 = (2 - x - y)^2 + (1 - x)^2 + (1 - 2x - y)^2 = f(x, y)$.

2. Ainsi $\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \|a - g(x, y)\|^2 = d(a, F)^2$.

/2

3. D'après le théorème de la distance d'un point à un s.e.v. de dim. finie, $d(a, F) = \|a - b\|$.

/2

4. Déjà, u et v sont libres donc F est bien un plan vectoriel. Soit p la projection orthogonale sur F .

Alors $a - b = a - p(a) \in F^\perp$ donc comme $u, v \in F$, $\langle a - b, u \rangle = \langle a - b, v \rangle = 0$.

/2

Puisque $b \in F$, b s'écrit $\lambda u + \mu v$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\langle a - \lambda u - \mu v, u \rangle = 0$ et $\langle a - \lambda u - \mu v, v \rangle = 0$

i.e. $5 - 6\lambda - 3\mu = 0$ et $5 - 3\lambda + 2\mu = 0$ i.e. $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = 1$. On en déduit que $b = \frac{1}{3}u + v = \frac{1}{3}(4, 1, 5)$.

5. $d(a, F) = \|a - b\| = \frac{1}{3}\|3a - 3b\| = \frac{1}{3}\|(2, 2, -2)\| = \frac{\sqrt{12}}{3} = \sqrt{\frac{4}{3}}$. D'où $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \frac{4}{3}$.

/1